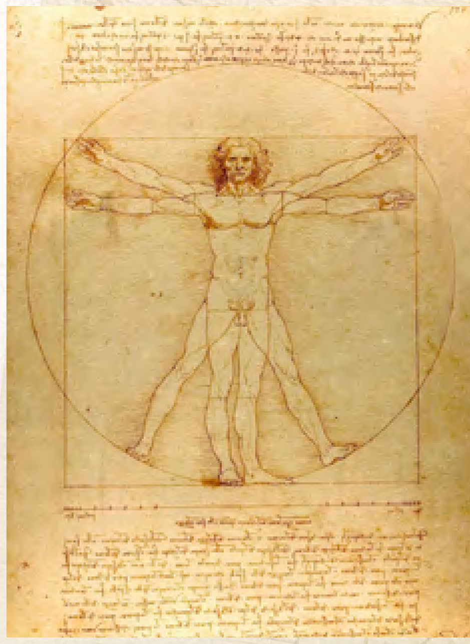
MATEMÁTICAS Y BIOLOGÍA

El número de oro, la matemática y la biología



Prof. Analía Cristante

Profesora de Enseñanza Media de Matemática

Vicedirectora del Colegio "25 de Mayo" de las Madres Escolapias, Córdoba

Donde quiera que haya un número, está la belleza.
PROCLO

En la mayoría de las ciencias una generación destruye lo que otra ha construido y lo que una ha establecido otra lo deshace. Sólo en Matemática, cada generación añade un piso nuevo a la antigua estructura.
HERMANN HANKEL

El principal propósito de todas las investigaciones sobre el mundo exterior debe ser descubrir el orden y la armonía racionales que han sido impuestos por Dios y que Él nos ha revelado en el lenguaje de las matemáticas.
JOHANNES KEPLER

El Número de Oro

Jake Bohm, un niño especial, de gran inteligencia, protagonista de la serie *Touch* de Netflix, no habla. Solo logra comunicarse con su papá a través de patrones numéricos y geométricos. Esa conexión a veces incomprensible pone a su papá en el camino, en la búsqueda, en la resolución de una situación... Patrones numéricos que transmiten necesidades, urgencias, pedidos de ayuda... y que conectan con quien tiene a su mano la solución.

En la historia de la Matemática hay un número que fue capaz de atravesar siglos de historia y construcción matemática, de llegar hasta nosotros proveniente de la Grecia Clásica, pasando particularmente por el Siglo XII y que fue capaz de fascinar

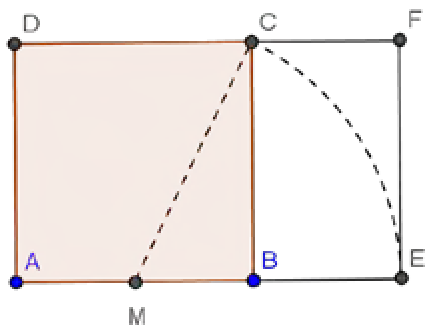


Figura 1: *Rectángulo Áureo*. Actualmente, las tarjetas de crédito, los DNI y las etiquetas box de cigarrillos tienen, en sus medidas, la proporción áurea.

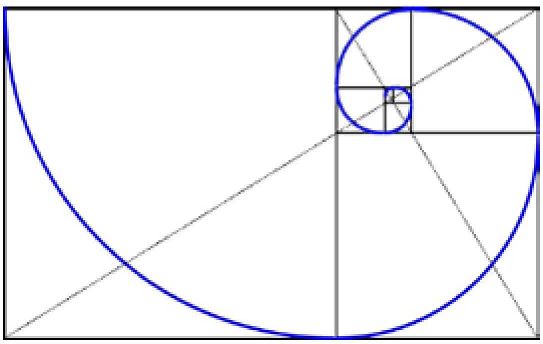


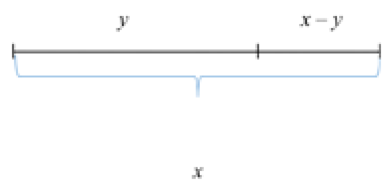
Figura 2: *Espiral Áurea*

Figura 3: El caracol Nautilus con su forma espiralada (*Espiral Áurea*)

a pintores, músicos, arquitectos y que está presente también en la naturaleza. Ese patrón numérico: ¿qué conexión quiso establecer con nosotros?, ¿de qué nos habla?

Este número conecta cosas disímiles: ¿qué patrón geométrico subyace en la obra de grandes pintores y arquitectos desde Fidias (500 a.C.-431a.C.) y Vitrubio (70a.C.-15a.C.) hasta Le Corbusier (1887-1965), pasando por Leonardo Da Vinci (1452-1519) y Salvador Dalí (1904-1989)? ¿Qué relación podemos encontrar entre el caparazón del Nautilus, la disposición de las semillas de una flor de girasol y las dimensiones del cuerpo humano? Aunque parezca increíble, la respuesta a todos estos interrogantes es un simple número, que ha recibido el apelativo de “Número de Oro”, “Divina proporción” y “Proporción Áurea”. Veamos si podemos analizar las circunstancias de su aparición para tratar de desentrañar su carácter “divino”.

Según los antiguos griegos, el mayor grado de belleza no se obtenía por la *simetría* sino por la *armonía* en las proporciones. Esta armonía se alcanzaba cuando al colocar un punto en un segmento (no en la mitad del mismo), la relación entre la longitud total de un segmento (x) y la parte mayor (y), es igual a la relación entre la parte mayor (y) y la menor (x – y) en la que quedó dividido ese segmento.



Es decir que se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x - y}$$

Esta es una proporción (igualdad de dos razones), pero ésta en particular, por contener esta idea griega de armonía fue llamada *Divina Proporción*. El resultado que se obtiene al trabajar algebraicamente dicha proporción es el llamado *Número de Oro*, aproximadamente igual a *1,618*, que se simboliza con la letra griega Phi (Φ) por ser la inicial del arquitecto del Partenón, el legendario Fidias.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

Todo este desarrollo matemático fue muy posterior a los griegos clásicos, puesto que la raíz cuadrada como operación, aunque fue considerada por ellos, pasó realmente desapercibida. No admitían números irracionales e intentaron evitarlos mediante artificios geométricos.

Sin embargo, el *Número de Oro*, por contener a la raíz de 5, que no es exacta, es irracional. Y eso hace que tenga infinitas cifras decimales no periódicas (que no se repiten nunca). Si ponemos en cualquier buscador "cifras decimales de Phi" podremos recorrer un montón de páginas web que muestran una cantidad grande de sus cifras decimales. En http://dpto.educacion.navarra.es/planlectura/indiceareas_files/Matematicas-Numero%20phi.pdf aparecen las primeras 2.000 cifras decimales, pero como curiosidad, en mayo de 2000, Xavier Gourdon y Pascal Sebah calcularon ***¡un billón y medio de decimales de Phi!*** con ayuda de una sencilla computadora.

Entonces, si buscamos dentro de esas infinitas cifras podemos hallar casi con seguridad nuestra fecha de cumpleaños, nuestro número de teléfono, nuestro número de matrícula. En realidad, podemos encontrar cualquier número de secuencia numérica que podamos imaginar.

El Rectángulo Áureo

Si dibujamos un rectángulo AEFD (Figura

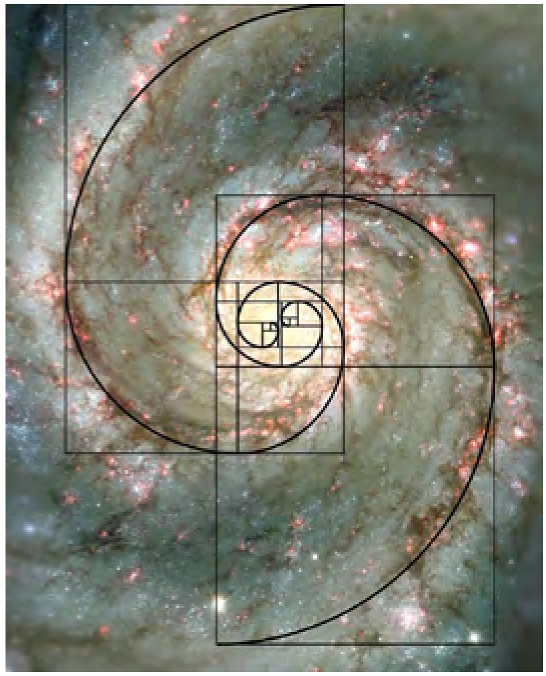


Figura 4: Forma espiralada de la vía láctea (*Espiral Áurea*)

1) en el que el cociente (resultado de la división) entre su lado mayor y el menor sea Phi (**Φ**), estaremos en presencia de un Rectángulo Áureo.

$$\Phi = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

Lo llamativo es que este cociente puede continuarse indefinidamente, puesto que el rectángulo BEFC, también es *áureo*. Por lo tanto, se cumple:

$$\Phi = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618,$$

y si seguimos particionando a los rectángulos en cuadrados y rectángulos, cada uno de éstos últimos resultan áureos. Y si vamos trazando cuartos de circunferencia con la medida de los lados de cada uno de los cuadrados, entonces obtenemos la espiral áurea (Figura 2).

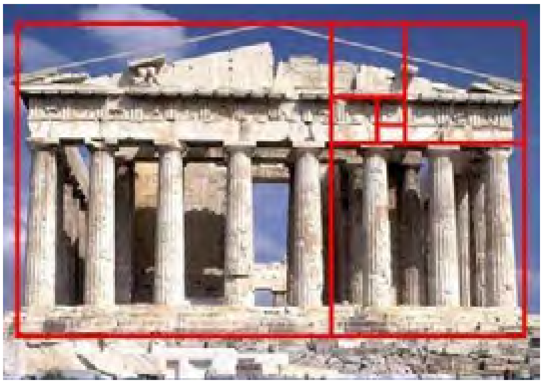


Figura 5: *Rectángulos Áureos* en la fachada del Partenón.

Figura 6: *Rectángulo Áureo* en la fachada de la Universidad de Salamanca

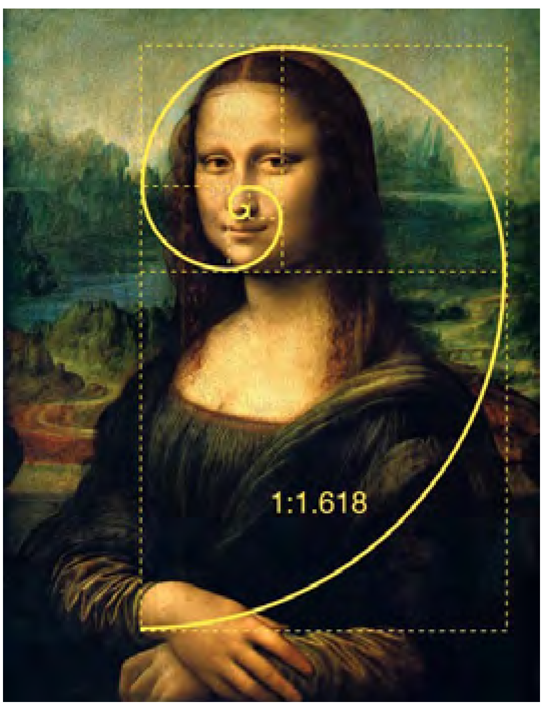


Figura 7: *La Gioconda*, de Leonardo da Vinci

Esta curva espiralada se puede observar fácilmente en la naturaleza, por ejemplo: en el caparazón del caracol Nautilus o en la forma de los brazos de la galaxia (Figuras 3 y 4).

El Número de Oro en la Arquitectura

El ***Número de Oro*** como patrón ideal de belleza está presente en la descomposición en rectángulos áureos en la totalidad de la fachada del Partenón, cuya construcción se terminó en el 438 a.C., aunque la toma de medidas sobre el terreno arroja ciertas inexactitudes. La fachada de la Universidad de Salamanca, la más antigua de España (1218), que fue reconstruida en el Siglo XV, está presidida por un rectángulo áureo. (Figuras 5 y 6) y en una cantidad más de construcciones tanto antiguas como modernas, como el edificio de Naciones Unidas en Nueva York, en cuya fachada se destacan tres rectángulos áureos. En la realización de este proyecto intervinieron Le Corbusier y Niemeyer.

El Número de Oro en el Arte

Luca Pacioli (1445-1517), un cura franciscano, fue el que acuñó el nombre *Divina Proporción* y junto con Leonardo Da Vinci fueron los responsables de poner a este número en la órbita del arte: la pintura y la arquitectura. Leonardo fue un genio y un teórico del arte de la pintura y el más firme defensor de la conexión de ésta con la Matemática. La Gioconda es el mejor representante de la proporción áurea hasta en los mínimos detalles (Figuras 7 y 8), pero también Velázquez en sus Meninas (Figuras 9 y 10), Miguel Ángel, Piero della Francesca, Sandro Boticelli y, más actualmente, George

Seurat y Salvador Dalí.

La Sucesión de Fibonacci

Leonardo Pisano o Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci (1170-1250), fue el matemático más destacado de la Edad Media *("Figlio de Bonacci, Hijo de Bonacci")*. En su libro *Liber abaci,* propone el famoso problema de los conejos: *"Un hombre tenía una pareja de conejos recién nacidos juntos en un corral y quería saber cuántos conejos podían nacer a partir de esta pareja en un año. Por su naturaleza, esta raza de conejos puede alumbrar a una nueva pareja de conejos una vez por mes a partir del segundo mes de vida."* Haciendo un diagrama de la situación, en la que P_1 es la pareja de conejos inicial, obtenemos:

1° Mes		1
2° Mes		1
3° Mes		2
4° Mes		3
5° Mes		5
6° Mes		8

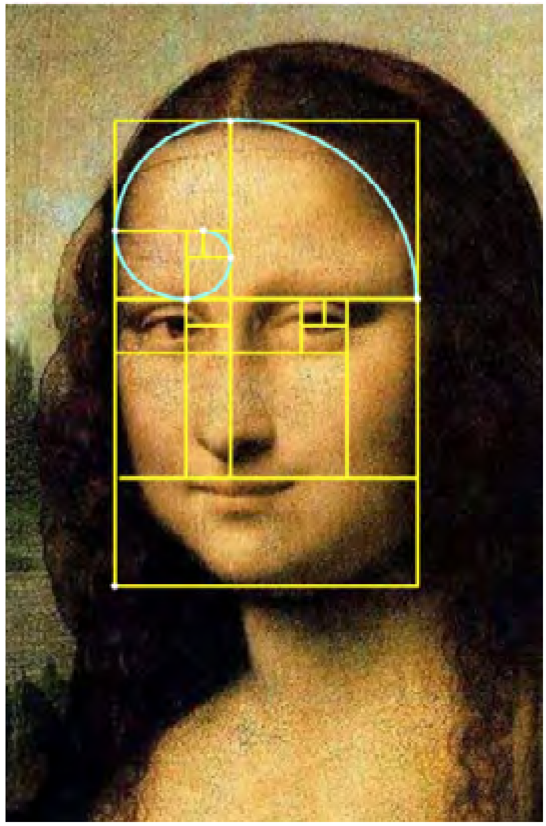


Figura 8: Detalle del rostro de *La Gioconda*

Esta sucesión numérica: 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ;... tiene la particularidad que, en cada mes a partir del tercero, los números que se obtienen son la suma de los dos términos anteriores. Por lo tanto, la cantidad de parejas de conejos en un año serían: 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144.

Una sucesión es un conjunto ordenado de números que puede ser finito o infinito. Cada número de la sucesión se llama *término* y se simboliza con la letra *a* (minúscula cursiva) y un subíndice. Así, a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término, etc.

Esta es la llamada sucesión de Fibonacci. Lo curioso de esta sucesión es que, al establecer los cocientes entre cada término de la sucesión y el término anterior al mismo, se va aproximando cada vez más al Número de Oro.

Figura 9: Las Meninas, de Velázquez

Figura 10: Detalle de *Las Meninas*

$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{1}{1} = 1$
$\frac{a_3}{a_2}$	$\frac{2}{1} = 2$
$\frac{a_4}{a_3}$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
$\frac{a_5}{a_4}$	$\frac{5}{3} = 1{,}6666\ldots$
$\frac{a_6}{a_5}$	$\frac{8}{5} = 1{,}6$
$\frac{a_7}{a_6}$	$\frac{13}{8} = 1{,}625$
$\frac{a_8}{a_7}$	$\frac{21}{13} = 1{,}61\hat{5}384$
$\frac{a_9}{a_8}$	$\frac{34}{21} = 1{,}61\hat{9}047$
$\frac{a_{10}}{a_9}$	$\frac{55}{34} = 1{,}617647059$
$\frac{a_{11}}{a_{10}}$	$\frac{89}{55} = 1{,}61\hat{8}1$
$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{144}{89} = 1{,}617977528$

¡Qué gran sorpresa!: el viejo *Número de Oro*, el ideal helénico clásico de la armonía,

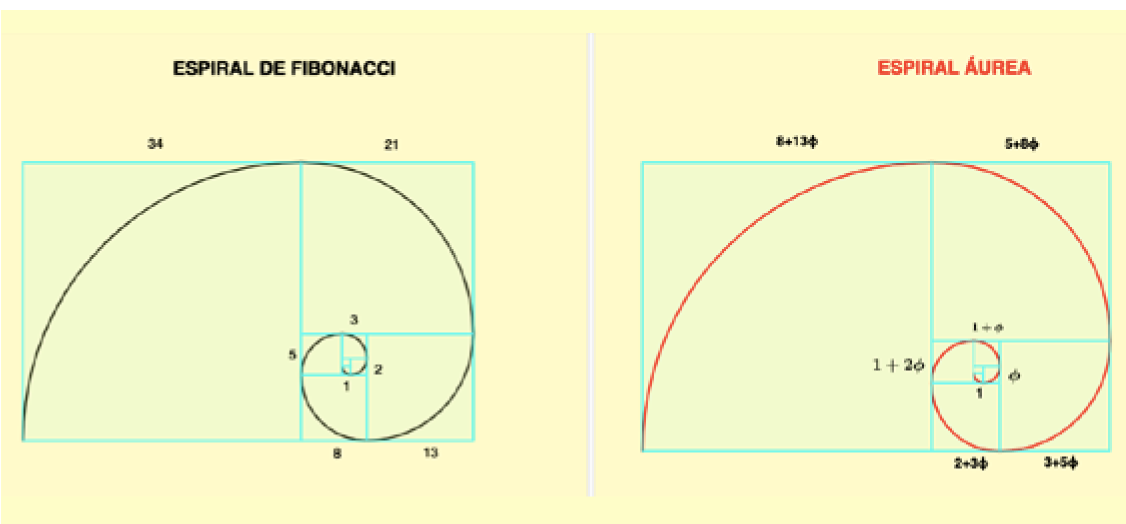


Figura 11: *Espiral de Fibonacci*

tan geométrico, aparece muchos siglos después como cociente de fracciones de una sucesión puramente aritmética. Este número logró la conexión entre las dos primeras ramas de la Matemática: Aritmética y Geometría.

También, una *Espiral de Fibonacci* se aproxima a la *Espiral Áurea* cuando se inscribe en cuadrados cuyos lados responden a la *Sucesión de Fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 y 21 (Figura 11).

Nótese la semejanza entre la *Espiral de Fibonacci* de la Figura 11 y la *Espiral Áurea* (Figura 2). No se sorprenda: el cociente de dos términos sucesivos de la *Sucesión de Fibonacci* tiende más y más al *Número Áureo*.

La naturaleza, en su armonía, también quiso ser parte de esta sucesión: las piñas, las semillas distribuidas en la flor del girasol (Figura 12) o en el centro de la flor de la manzanilla (Figura 13) presentan un número de espirales en uno y otro sentido que son dos términos consecutivos de la *Sucesión de Fibonacci*. ¿Magia? ¿Casualidad?

Las medidas de las falanges de la mano del cuerpo humano adulto también siguen el patrón de la *sucesión de Fibonacci* (Figura 14).

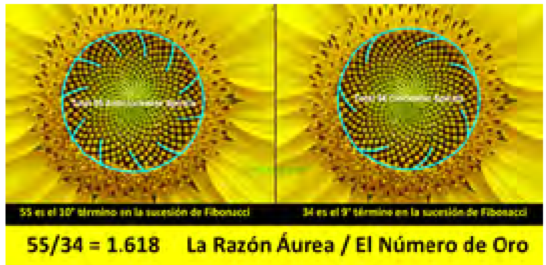


Figura 12: Semillas de girasol

Figura 13: Botón de la manzanilla amarilla mostrando la ordenación en espirales de 21 módulos en color azul (8° término en la *Sucesión de Fibonacci*) y 13 módulos en color cian (7° término en la *Sucesión de Fibonacci*).

Figura 14: Los huesos que forman el dedo de la mano están en la misma proporción que los números 2, 3, 5 y 8 en sucesión (los cocientes correspondientes se van aproximando al valor del *Número de Oro*).

Las Proporciones en el Cuerpo Humano

Leonardo da Vinci aplicó el conocimiento científico de las proporciones humanas a los estudios de Luca Pacioli y Vitrubio acerca de la belleza. El hombre ideal o *el Hombre de Vitrubio* (Figura 15), actualmente conservado en la Real Academia de Venecia, muestra las proporciones ideales del cuerpo humano relacionándolo con la geometría. Siguiendo el ideal renacentista, Leonardo pone al hombre en el centro del universo y lo inscribe dentro de un círculo y un cuadrado. La figura sigue las recomendaciones del arquitecto Vitrubio, el arquitecto de Julio César (siglo I a. C.). La razón entre el lado del cuadrado y el radio

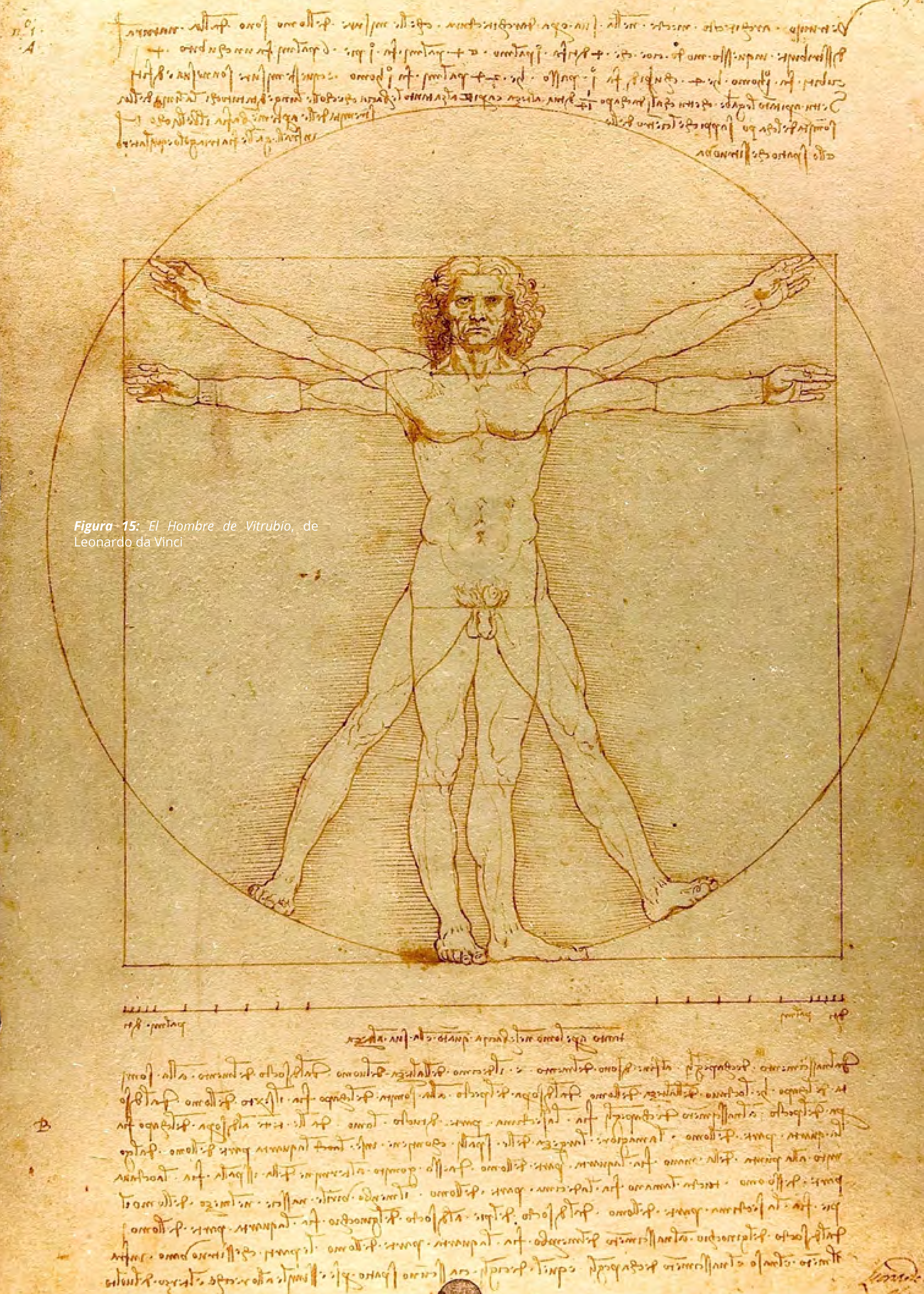


***Figura 15:** El Hombre de Vitrubio*, de Leonardo da Vinci

del círculo es áurea.

El hombre ideal representa relaciones aproximadas en el cuerpo humano de una persona adulta en la que debe cumplirse:

$$\frac{Altura}{Distancia\ del\ ombligo\ al\ suelo} = \Phi \cong 1{,}618$$

No sólo ahí se agota la relación que da por resultado el *Número de Oro*. Se puede obtener el cociente entre la longitud del brazo (desde el hombro hasta el dedo mayor) y la medida del antebrazo (desde el codo hasta el dedo mayor) y obtendríamos.

También podemos hacer el cociente entre la longitud del miembro inferior (muslo y pierna) y la medida de la pierna y nuevamente obtendríamos . O una buena aproximación del mismo... (Figura 16)

Si comprobamos esas medidas en nuestro propio cuerpo, tal vez nos llevemos un disgusto: es difícil que nos acerquemos a ellas puesto que son las proporciones de una belleza idealizada. Sin embargo, la estadística puede venir en nuestro auxilio. Si tomamos un buen número de personas y tomamos la media de todos esos cocientes, entonces nos acercamos bastante más al ideal de belleza. El ser humano que, según la Biblia, fue creado a imagen y semejanza de Dios, es ideal solo como promedio.

El arquitecto Le Corbusier también hizo su aportación a la exuberante historia del *Número de Oro*. Como respuesta al *Hombre de Vitrubio*, él ideó el *Hombre Modulor*. Pensó en un sistema de medidas basado en el cuerpo humano para la edificación y el diseño del mobiliario doméstico. En cierta manera es una búsqueda antropométrica de un sistema de medidas del cuerpo humano en que cada magnitud se relaciona con la anterior por el *Número Áureo*, todo con la finalidad de que sirviese como medida base en las partes de la arquitectura.

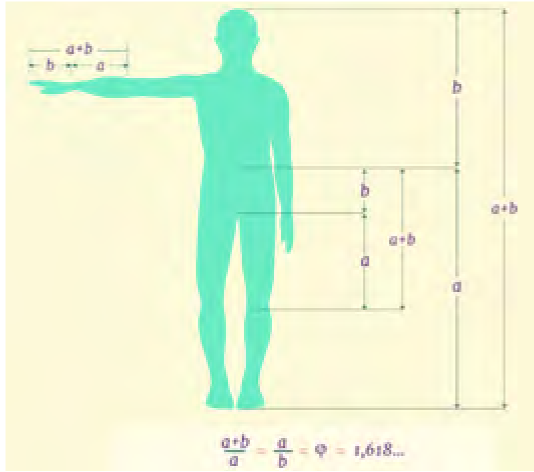


Figura 16: Silueta humana con medidas que conservan la proporción áurea.

Sus libros, *El Modulor* de 1948 y *El Modulor* 2 de 1955, estaban basados respectivamente en la medida del prototipo sajón (1,83 m de estatura) y del prototipo latino (1,72 m de estatura).

Las medidas parten desde la medida del hombre con la mano levantada (226 cm) y de su mitad, la altura del ombligo (113 cm). Desde la primera medida, multiplicando sucesivamente y dividiendo de igual manera por el *Número de Oro*, se obtiene la llamada *serie azul* y de la segunda, del mismo modo, la *roja*. Cada una de ellas es una *Sucesión de Fibonacci*, y permitiendo miles de combinaciones armónicas.

Entre sus principales objetivos se encuentra la normalización, la prefabricación y la industrialización de los muebles. Por ejemplo, lo que se construya en USA, debe ser compatible con lo que se construya en Europa. Este nuevo sistema debería ser antropométrico, matemático y armónico y, por lo tanto, basado en la medida de un hombre de 1,83 metros de altura, que con el brazo en alto alcanzaría aproximadamente 2,20 metros.

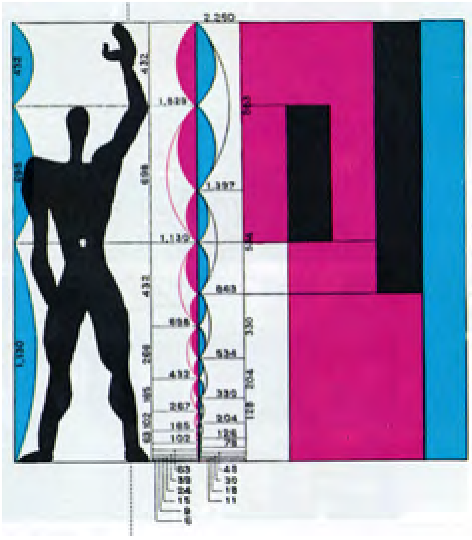


Figura 17: *El Hombre Modulor*, de Le Corbusier.

Observemos que esas medidas pueden conformar una *serie de Fibonacci* (1,83 = 1,13 + 0,70), deduciendo, por tanto, otras: 0,27; 0,43; 0,70; 1,13; 1,83; 2,96; 4,79.

A esta serie, Le Corbusier la llamó *Roja*. Se comprueba que son medidas que tienen que ver con la estructura física del hombre, es decir: 1,13 coincide con la altura del plexo solar y 0,70 puede ser un buen apoyo para el antebrazo del hombre sentado. Se plantea a continuación qué ocurre con el espacio que ocupa: el hombre de 1,83, levanta el brazo y toca el techo, ¿qué altura tenemos?, aproximadamente 2,26 que corresponde al doble de la unidad 1,13. Si la unidad 1,13 creó una serie por adición, su doble puede crear otra por sustracción, que estaría íntimamente relacionada con la primera.

La serie *Azul* mantiene una relación de 2 a 1 respecto a Roja (1,40 = 2 x 0,70) (Figura 17).

Hasta aquí llega nuestro artículo. Hay mucho más acerca de este *Número*, muchas más aplicaciones matemáticas que hemos soslayado, muchas más apariciones en espacios culturales, muchos ejemplos más en la naturaleza, en el crecimiento de plantas en la inserción de sus hojas...

Nuestra intención fue mostrar cómo este Número se ha abierto camino en la historia de la Matemática y en la historia cultural de la humanidad, atravesando 26 siglos para llegar hasta nosotros de la mano de matemáticos, geómetras, arquitectos, artistas y, tal vez, de la mano del mismo Dios.

Bibliografía

- Corbalán F. "La proporción áurea- El lenguaje matemático de la belleza"; RBA Libros Coleccionables. Edit. EDITEC, Madrid (España); **2010**.
- Kline M. "El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días, I"; Edit. Alianza Universidad, Madrid (España); 1992.
- Búsqueda en Internet:
- www.neoteo.com/la-sucesion-de-fibonacci-en-la-naturaleza/¸ fecha de consulta 29/01/2019
- https://es.wikipedia.org/wiki, fecha de consulta 29/01/2019.
- https://www.quo.es/naturaleza/a21423/la-espiral-de-fibonacci fecha de consulta 15/02/2019.
- https://conciertaciencia.wordpress.com/tag/los-numeros-de-fibonacci/, fecha de consulta 10/03/2019.
- http://salephianos.blogspot.com/2017/05/sucesion-de-fibonacci-en-el-cuerpo.html, fecha de consulta 10/03/2019.
- http://www.esferatic.com/2012/11/arte-y-matematicas-numeros-escondidos-en-el-partenon-la-mona-lisa-y-la-manzana-de-apple/
- fecha de consulta 10/03/2019.
- http://dpto.educacion.navarra.es/planlectura/indiceareas_files/Matematicas-Numero%20phi.pdf fecha de consulta 11/03/2019.